**Εξέταση Σεπτεμβρίου 2021 - Απειροστικός Λογισμός 2**

**Διδάσκοντες Ε. Νικολιδάκης και Χ. Σαρόγλου**

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Μπορεί σε κάθε ερώτηση να υπάρχουν και δύο σωστές απαντήσεις.

**Ερώτηση 1.** Δίνεται συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f^2$ να είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Τότε,

(i) η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(ii) η $f^3$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(iii) η $f^4$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(iv) η $ee^f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

**Ερώτηση 2.** Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ να συγκλίνει. Τότε

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλινουσα.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ είναι συγκλινουσα.

(iii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^n$ είναι συγκλινουσα.

(iv) Η ακτίνα σύγκλισης $R$ της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ικανοποιεί την ανισότητα $R \geq 1$.

**Ερώτηση 3.** Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + 2x^3 - 7x^4 + 8x^8$. Αν $R_{n,f,0}(x)$ είναι το υπόλοιπο Taylor τάξης $n$ της $f$ με κέντρο το $x_0 = 0$ (όπου $n \in \mathbb{N}$), τότε

(i) $R_{8,f,0}(x) = 8x^8$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{R_{8,f,0}(x)}{x^8} = 8$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{R_{7,f,0}(x)}{x^7} = 0$.

(iv) Αν $n \geq 10$, τότε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}(x)$ τάξης $n$ της $f$ με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι βαθμού τουλάχιστον 7.

**Ερώτηση 4.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,9] \to (0,+\infty)$ ώστε $\int_0^9 f(x)dx = 18$. Τότε

(i) υπάρχει $x_0 \in [0,9]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$.

(ii) υπάρχει $x_0 \in [0,9]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$.

(iii) υπάρχει $x_0 \in [0,9]$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)dx = 10$.

(iv) υπάρχει $x_0 \in [0,8]$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)dx = 15$.

**Ερώτηση 5.** Δίνεται συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x^2 & , \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

και η διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \ldots, \frac{n-1}{2n}, \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}, 1\right\}$ του $[0,1]$ (όπου $n \in \mathbb{N}$). Τότε

(i) $L\left(f|_{[0,1/2]}, P_n \cap [0,1/2]\right) = \dfrac{2n-1}{8n}$.

(ii) $U\left(f|_{[0,1/2]}, P_n \cap [0,1/2]\right) = \dfrac{n-1}{16n}$.

(iii) $L\left(f, P_n\right) = \dfrac{n+1}{8n} + \dfrac{25}{64}$.

(iv) δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω.

**Ερώτηση 6.** Δίνεται η φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt[3]{a_n}$ να συγκλίνει. Τότε

(i) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n}$ είναι συγκλινουσα.

(ii) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ είναι συγκλινουσα.

(iii) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλινουσα.

(iv) δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω.

**Ερώτηση 7.** Δίνεται φθίνουσα συνάρτηση $f\colon [1,+\infty) \to (1,+\infty)$ ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_3^{+\infty} f^2(x)dx$ να συγκλινει. Τότε

(i) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n)$ συγκλίνει.

(ii) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{f(n)}$ συγκλίνει.

(iii) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f^2(x)dx$ συγκλίνει.

(iv) το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(x)dx$ συγκλινει.

**Ερώτηση 8.** Δίνεται συνάρτηση $f\colon I \to \mathbb{R}$ όπου $I$ υποδιάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε

(i) Αν $f(x) = x^{10},\ x \in I$ με $I = [0, +\infty)$, η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Αν $f(x) = x^{1/10},\ x \in I$ με $I = (0, +\infty)$, η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(iii) Αν $f(x) = x^2 \sin x,\ x \in I$ με $I = [0, +\infty)$, η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(iv) Αν $f$ είναι φραγμένη, συνεχής στο $I$ και το $I$ είναι φραγμένο διάστημα, η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**Ερώτηση 9.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες οι $f, g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$ και η $h$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Τότε η συνάρτηση

(i) $f + g - 3h$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

(ii) $(f - g) \cdot h$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

(iii) $f \cdot h + g$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

(iv) $f \cdot g \cdot h$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

**Ερώτηση 10.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε η $f$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $(0,2)$ και $(1, +\infty)$. Τότε

(i) η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(ii) το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(iii) η $f$ είναι φραγμένη.

(iv) αν $x_n = \frac{1}{n},\ n \geq 2$, τότε υπάρχει τό όριο $\lim\limits_{n} f(x_n)$ και είναι πραγματικός αριθμός.